

Klasyczna teoria laminatów

Dzięki temu, że grubość warstw kompozytów włóknistych jest zazwyczaj dużo mniejsza od ich pozostałych wymiarów, możemy przyjąć założenie, że pracują one w płaskim stanie naprężenia, czyli że:

$$\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

W związku z tym w analizie warstwy ortotropowej brane są pod uwagę tylko odkształcenia ε_{11} , ε_{22} i γ_{12} . Zależność między odkształceniami i naprężeniami przybiera zatem postać:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Ogólny związek na odkształcenia-naprężenia w dowolnym układzie współrzędnych x, y, z obrócony o kąt α w płaszczyźnie warstwy względem układu 1, 2, 3 ma postać:

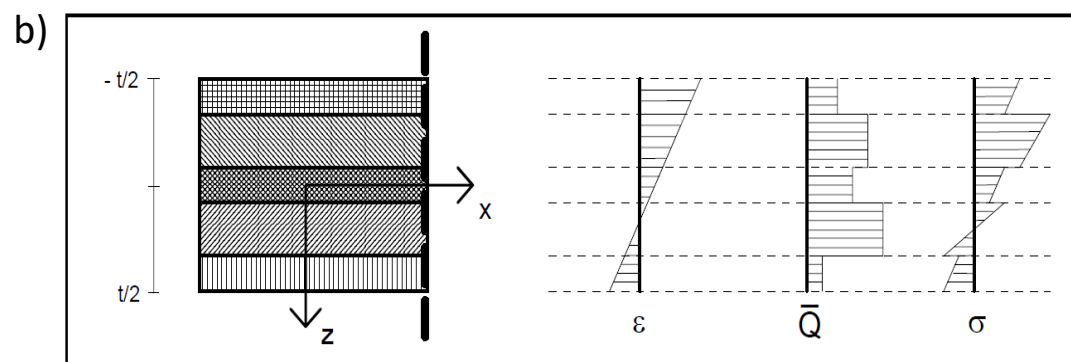
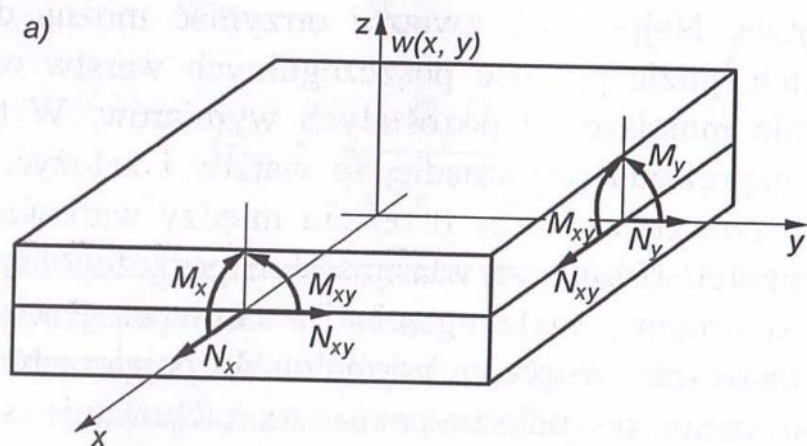
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Przy rozważaniu własności laminatu składającego się z wielu warstw ortotropowych ściśle związanych ze sobą zakłada się, że pracuje on jak zwarta powłoka. Najprostsze opisy matematyczne otrzymać można dla tak zwanych laminatów cienkich, gdzie grubości poszczególnych warstw jak i grubość całkowita są znacznie mniejsze od pozostałych wymiarów.

Zakładamy, że:

- Warstwy ortotropowe są sztywno połączone ze sobą, połączenie ma zerową grubość, warstwy nie mogą się przemieszczać względem siebie,
- Poszczególne warstwy mają jednorodne właściwości, tzn. nie zmieniają się one wraz ze współrzędnymi x i y .



Laminat składający się z wielu warstw ortotropowych: a) siły wewnętrzne, b) przykładowy rozkład naprężeń po grubości laminatu

Wypadkowe siły i momenty możemy określić z zależności:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^z dz & M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_x^z z dz \\
 N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_y^z z dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}^z dz & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{xy}^z z dz
 \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_x^z = \sigma_{xx}$, $\sigma_y^z = \sigma_{yy}$, $\tau_{xy}^z = \tau_{xy}$.

Całkując powyższe zależności otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A \quad B] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B \quad D] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – odkształcenia błonowe

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ – krzywizny powierzchni laminatu;

w – ugięcie powierzchni środkowej laminatu;

$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ - siły wewnętrzne;

A – macierz sztywności tarczowej (extensional stiffness matrix);

B – macierz sztywności sprzężenia między rozciąganiem i zginaniem (bending-extension coupling stiffness matrix);

D – macierz sztywności giętno-skrętnej laminatu (bending stiffness matrix).

Macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , każda o wymiarach 3×3 , które charakteryzują zachowanie się laminatu są symetryczne i zależą od właściwości wszystkich warstw ortotropowych, ich orientacji i usytuowania w laminacie:

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k - z_{k-1}) \quad \mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad \mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

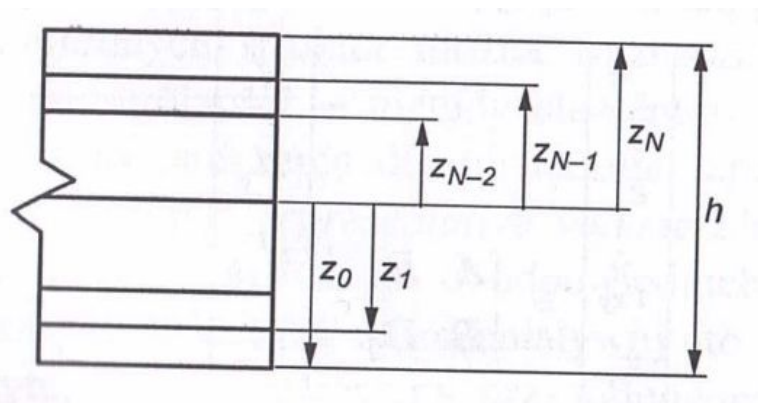
gdzie:

$$i = 1, 2, 6, j = 1, 2, 6$$

z_k – odległość k -tej warstwy od powierzchni średniej;

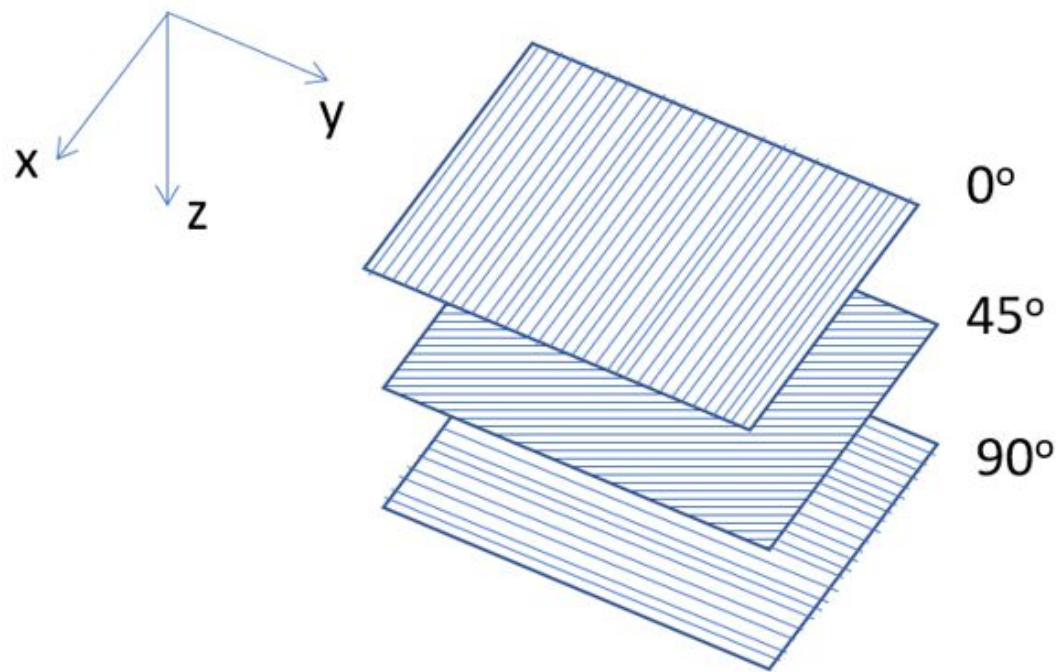
N – liczba warstw;

Q_{ij}^{*k} – macierz sztywności k -tej warstwy transformowana do układu xy .



Macierze A, B i D zależą od właściwości, grubości, ale także od kąta ułożenia warstw. Jeżeli laminat utworzony jest z warstw jednego rodzaju, co w praktyce zdarza się bardzo często, do jego opisania potrzebne jest zdefiniowanie kątów orientacji warstw. Definiuje się je zwykle zgodnie z kierunkiem osi z. Poszczególne warstwy oddziela się ukośnikami, a całość umieszcza się w nawiasie kwadratowym.

np.: [0/45/90]



Indeks dolny oznacza n-krotne powtórzenie warstwy:

$$\text{np.: } [0_2/45_2/90] = [0/0/45/45/90]$$

Jeżeli po nawiasie kwadratowym jest indeks S, oznacza to, że podany układ warstw jest odbity symetrycznie względem płaszczyzny symetrii układu warstw.

np.:

$$[0/45/90]_S = [0/45/90/90/45/0]$$

$$[90_2/0/-45_2]_S = [90/90/0/-45/-45/-45/-45/0/90/90]$$

Poszczególne wyrazy macierzy A, B i D są odpowiedzialne za sprzężenia w zachowaniu laminatu:

- Sprężenie ścinanie – rozciąganie/ściskanie,
- Sprężenie zginanie – rozciąganie/ściskanie, ścinanie - skręcanie,
- Sprężenie skręcanie – rozciąganie/ściskanie, zginanie - ścinanie,
- Sprężenie zginanie – skręcanie.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Elementy A_{16} , A_{26} , B_{16} , B_{26} , D_{16} i D_{26} znikają, jeżeli macierze sztywności wszystkich warstw mają postać:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Czyli warstwy muszą mieć kąty zbrojenia tylko 0/90. Wtedy równania sił i momentów mają postać:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

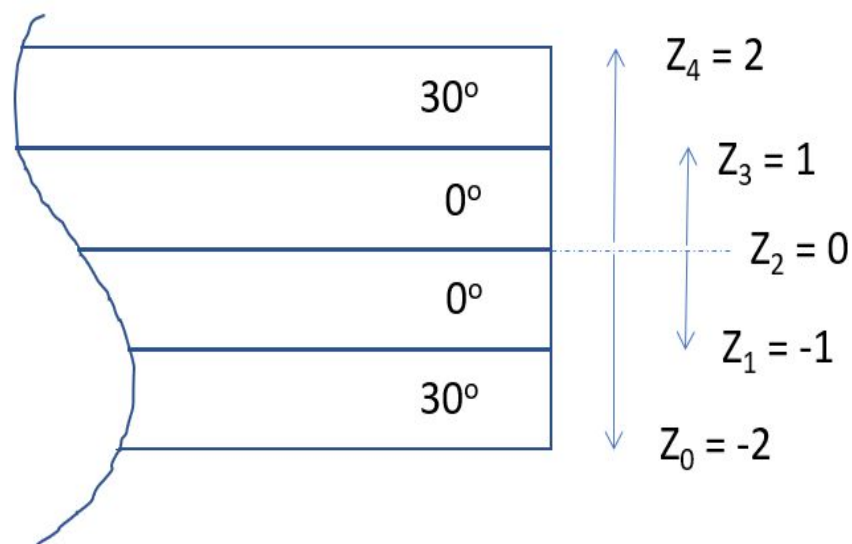
Metodą zerowania elementów macierzy B_{ij} jest zastosowanie symetrycznego układu warstw, czyli takiego, w którym układ warstw po jednej stronie powierzchni środkowej jest lustrzanym odbiciem układu warstw po drugiej stronie. Czyli np.:

$$[0^\circ/45^\circ/90^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ] = [0^\circ/45^\circ/90^\circ]_s$$

Są możliwe również symetryczne układy warstw z nieparzystą liczbą warstw, np.:

$[0^\circ/45^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]$, ale wtedy nie możemy stosować notacji skróconej.

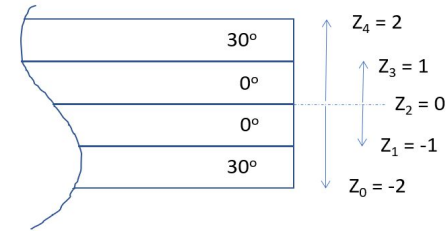
Rozpatrzmy symetryczny laminat o układzie warstw $[30^\circ/0^\circ]_s$. Grubość warstwy $t = 1$.



$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k - z_{k-1}) = Q_{ij}^*(30^\circ)(-1 - (-2)) + Q_{ij}^*(0^\circ)(0 - (-1)) + \\ + Q_{ij}^*(0^\circ)(1 - 0) + Q_{ij}^*(30^\circ)(2 - 1) = 2Q_{ij}^*(30^\circ) + 2Q_{ij}^*(0^\circ)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} (Q_{ij}^*(30^\circ)((-1)^2 - (-2)^2) + Q_{ij}^*(0^\circ)(0^2 - (-1)^2) + \\ + Q_{ij}^*(0^\circ)(1^2 - 0^2) + Q_{ij}^*(30^\circ)(2^2 - 1^2)) = \frac{1}{2} (-3Q_{ij}^*(30^\circ) - Q_{ij}^*(0^\circ) + Q_{ij}^*(0^\circ) + \\ + 3Q_{ij}^*(30^\circ)) = 0$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \frac{1}{3} (Q_{ij}^*(30^\circ)((-1)^3 - (-2)^3) + Q_{ij}^*(0^\circ)(0^3 - (-1)^3) + \\ + Q_{ij}^*(0^\circ)(1^3 - 0^3) + Q_{ij}^*(30^\circ)(2^3 - 1^3)) = \frac{1}{3} (7Q_{ij}^*(30^\circ) + Q_{ij}^*(0^\circ) + Q_{ij}^*(0^\circ) + \\ + 7Q_{ij}^*(30^\circ)) = 14Q_{ij}^*(30^\circ) + 2Q_{ij}^*(0^\circ)$$



Zatem dla dowolnego laminatu symetrycznego:

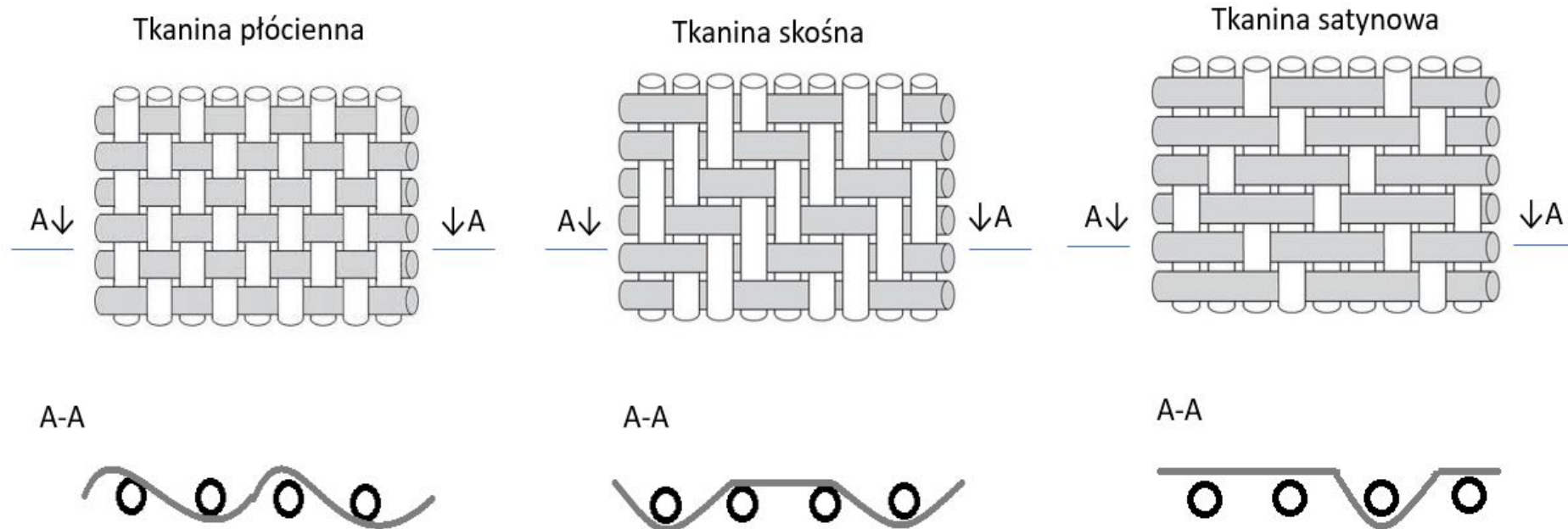
$$[A_{ij}] \neq 0, [D_{ij}] \neq 0, \text{ ale } [B_{ij}] = 0$$

W związku z tym równania sił i momentów dla dowolnego laminatu symetrycznego wyglądają następująco:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Należy zwrócić uwagę, że aby laminat był symetryczny, nie tylko musi on mieć symetryczny układ warstw, ale też warstwy, z których jest on zrobiony muszą być symetryczne same w sobie.



W przypadku tkaniny satynowej:



Większość włókien osnowy idzie 'dołem', więc jeżeli tkaninę odwrócimy, sytuacja nie będzie analogiczna. Następujący układ warstw nie jest więc symetryczny:

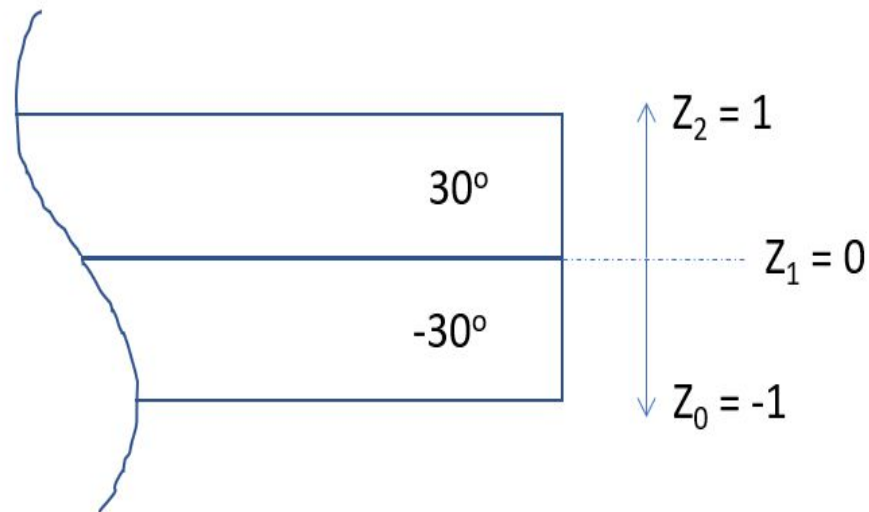


Należy warstwy odwrócić tak, aby pary warstw były symetryczne względem siebie zachowując ukierunkowanie warstw:



Inną możliwością 'wyzerowania' niektórych elementów macierzy jest tzw. laminat zrównoważony (balanced), czyli taki, w którym warstwy o zbrojeniu innym niż $0^\circ/90^\circ$ są zrównoważone warstwą o ujemnym kącie zbrojenia, czyli, np.: każdej warstwie o zbrojeniu 45° odpowiada warstwa -45° , każdej warstwie o zbrojeniu 30° odpowiada warstwa o zbrojeniu -30° , itd. i antysymetryczny. Warstwy te muszą mieć takie same właściwości i grubości.

Dla przykładu rozpatrzmy laminat złożony z dwóch warstw: $[-30^\circ/30^\circ]$. Dla uproszczenia przyjmijmy grubość warstwy $t = 1$.



Dla $\alpha = 30^\circ$: $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$Q_{16}^* = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})s^3c = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66}) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_{26}^* = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dla $\alpha = -30^\circ$: $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

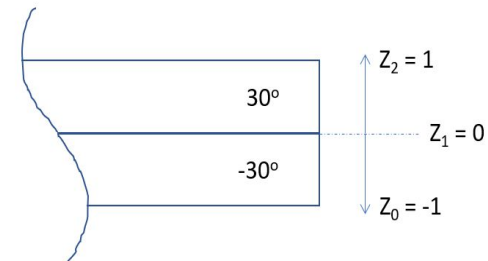
$$Q_{16}^* = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})s^3c = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66}) \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_{26}^* = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Czyli:

$$Q_{16}^*(\alpha) = -Q_{16}^*(-\alpha)$$

$$Q_{26}^*(\alpha) = -Q_{26}^*(-\alpha)$$



W związku z tym:

$$\begin{aligned} A_{16} &= \sum_{k=1}^N Q_{16}^{*k} (z_k - z_{k-1}) = Q_{16}^*(-30^\circ)(0 - (-1)) + Q_{16}^*(30^\circ)(1 - 0) = \\ &= -Q_{16}^*(30^\circ) \cdot 1 + Q_{16}^*(30^\circ) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

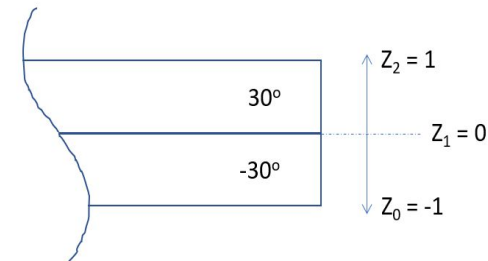
Analogicznie dla A_{26} .

$$\begin{aligned} B_{16} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{16}^{*k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} (Q_{16}^*(-30^\circ)(0^2 - (-1)^2) + Q_{16}^*(30^\circ)(1^2 - 0^2)) = \\ &= \frac{1}{2} (-Q_{16}^*(30^\circ)(-1) + Q_{16}^*(30^\circ) \cdot 1) = Q_{16}^*(30^\circ) \end{aligned}$$

Analogicznie dla B_{26} .

$$\begin{aligned} D_{16} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{16}^{*k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \frac{1}{3} (Q_{16}^*(-30^\circ)(0^3 - (-1)^3) + Q_{16}^*(30^\circ)(1^3 - 0^3)) = \\ &= \frac{1}{3} (-Q_{16}^*(30^\circ) \cdot 1 + Q_{16}^*(30^\circ) \cdot 1) = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie dla D_{26} .



Zatem dla dowolnego laminatu zrównoważonego i antysymetrycznego:

$$A_{16} = A_{26} = 0, D_{16} = D_{26} = 0, \text{ ale } B_{16} \neq 0 \text{ i } B_{26} \neq 0$$

W związku z tym równania sił i momentów dla dowolnego zrównoważonego laminatu wyglądają następująco:

$$\begin{cases} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{cases}$$
$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{cases}$$

Jeżeli natomiast laminat jest zrównoważony, ale symetryczny: $D_{16} \neq 0$ i $D_{26} \neq 0$.

W związku z tym równania sił i momentów dla dowolnego zrównoważonego laminatu wyglądają następująco:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Aby zatem otrzymać laminat, dla którego związki odkształcenie-naprężenie będą jak najbardziej zbliżone do materiału izotropowego, należy zaprojektować układ warstw, który będzie :

- Zrównoważony (eliminacja sprzężenia rozciąganie-ściananie),
- Symetryczny (eliminacja sprzężenia rozciąganie-zginanie i rozciąganie – skręcanie).

W takim wypadku równania sił i momentów wyglądają następująco:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Przykładem laminatu, w którym unikniemy większości sprzężeń jest np.:

$$[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]_s$$

Jeżeli w laminacie występują sprzężenia, gotowa konstrukcja będzie się zachowywać w sposób nieprzewidywalny, np.:

- Element rozciągany zacznie się skręcać,
- Element rozciągany ulegnie odkształceniom postaciowym.

Niepożądane odkształcenia można zablokować 'na siłę', ale spowoduje to wprowadzenie w strukturę dodatkowych naprężeń, które nie zostały uwzględnione w procesie projektowania, co w skrajnych przypadkach może doprowadzić do katastrofy.

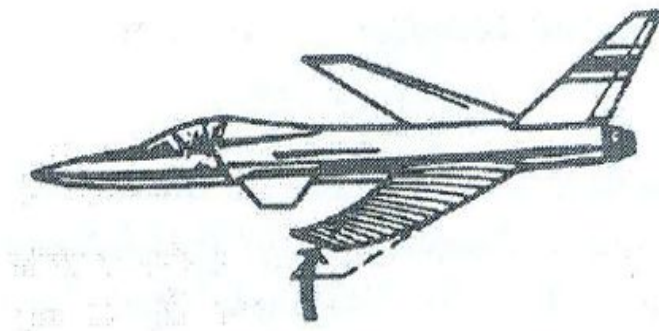
Sprzężenia w laminatach mogą być również pozytywne. Jeżeli konstruktor jest świadomy ich istnienia, może się nimi posłużyć, żeby osiągnąć korzystne efekty. Sprzężenia w konstrukcjach laminatowych zostały wykorzystane w samolocie Grumman X-29A do redukcji skręcenia skrzydeł.



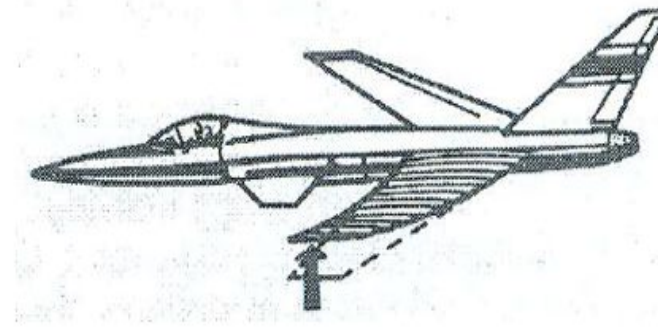
Samolot Grumman X-29A

Z uwagi na nowatorskie rozwiązanie konstrukcji skrzydeł, która miała na celu redukcję oporu przy prędkościach okołodźwiękowych i jednoczesną poprawę charakterystyk przy małych prędkościach, działał na nie bardzo duży aerodynamiczny moment skręcający. Wynikające z niego skrócenie skrzydeł można było wyeliminować w sposób tradycyjny zwiększając znacząco sztywność konstrukcji, co jednak wiązałoby się ze wzrostem masy.

Dlatego zastosowano układ warstw kompozytowych, który miał sprzężenie zginanie-skręcenie. Pod wpływem siły nośnej skrzydła się uginają, co powodowało również skręcanie, które częściowo równoważyło skręcanie aerodynamiczne.



Metalowe skrzydło ugina się i skręca



Skrzydło kompozytowe ugina się bez skręcenia

[Jones]

Laminaty quasi-izotropowe

Jeszcze jedną charakterystyczną grupą laminatów są laminaty quasi-izotropowe. Laminatami quasi-izotropowymi określa się laminaty o takiej budowie, że elementy macierzy sztywności [A] w dowolnym układzie odniesienia xy spełniają warunki:

$$A_{11} = A_{22}$$

$$A_{16} = A_{26}$$

$$A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12})$$

W materiale izotropowym macierz sztywności [Q], a w konsekwencji macierz sztywności tarczowej [A] spełniają takie właśnie warunki. Formalne podobieństwo macierzy [A] dla materiałów izotropowych i tej szczególnej klasy laminatów sprawia, że zostały one nazwane quasi-izotropowymi. Nazwa ta jest adekwatna także z tego powodu, że makroskopowo kompozyty quasi-izotropowe zachowują się, jak materiały izotropowe, tzn. ich charakterystyki materiałowe nie zmieniają się przy obrocie układu odniesienia. Są to jednak w dalszym ciągu laminaty z ich wszystkimi charakterystycznymi cechami, jak choćby tą, że naprężenia po grubości zmieniają się skokowo między warstwami, co różni je od 'zwykłego' materiału izotropowego – stąd w nazwie przedrostek 'quasi'.

Przykładem kompozytu quasi-izotropowego jest kompozyt zbrojony losowo rozłożonymi włóknami, co oznacza jednakowe prawdopodobieństwo ich rozmieszczenia w dowolnym kierunku. Cechę quasi-izotropii mogą posiadać również klasyczne laminaty złożone z warstw zbrojonych włóknem ciągłym. Podstawowe sekwencje warstw dla tej klasy laminatów mają kody:

$$\left[0^\circ / \pm \frac{\pi}{3}\right] \text{ i } \left[0^\circ / \pm \frac{\pi}{4} / 90^\circ\right]$$

Na ich bazie można tworzyć quasi-izotropowe laminaty, np.:

$[60^\circ / 0^\circ / -60^\circ]$ – kąty między warstwami wynoszą $\pi/3$

$[90^\circ / 45^\circ / 0^\circ / -45^\circ]$ – kąty między warstwami wynoszą $\pi/4$

Laminaty quasi-izotropowe mają tę zaletę, że konstruując odpowiedni laminat (tzn. dobierając odpowiedni materiał i ułożenie warstw) można uzyskać te same wartości stałych inżynierskich, co dla klasycznych materiałów izotropowych, ale przy niższej masie.

Naprężenia termiczne

Sama analiza mechaniczna nie wystarcza w momencie, gdy laminat jest utwardzany w podwyższonej temperaturze. W takim przypadku powstają w nim naprężenia termiczne, które muszą zostać wzięte pod uwagę. Termosprężysta zależność między odkształceniem i naprężeniem ma postać:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_{ij} + \alpha_i\Delta T$$

W której całkowite odkształcenie jest sumą odkształceń mechanicznych $S_{ij}\sigma_{ij}$ i odkształcenia termicznego $\alpha_i\Delta T$ dla różnych temperatur ΔT . Zależność między naprężeniami i odkształceniami ma postać:

$$\sigma_i = Q_{ij}(\varepsilon_i - \alpha_i\Delta T)$$

Dla płaskiego stanu naprężeń warstwy w głównych osiach ortotropii:

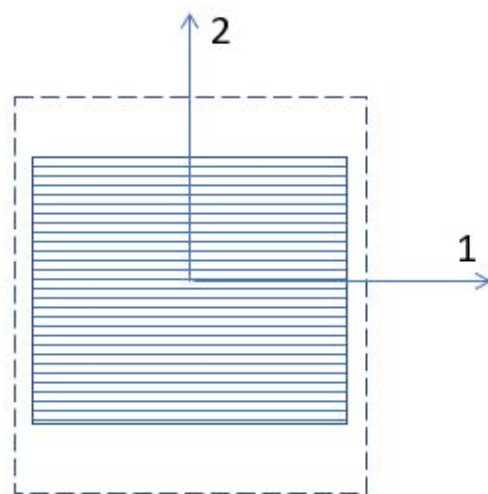
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_2 \Delta T \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Proszę zauważyć, że rozszerzalność cieplna wpływa tylko na odkształcenia liniowe, a nie kąt odkształcenia postaciowego.

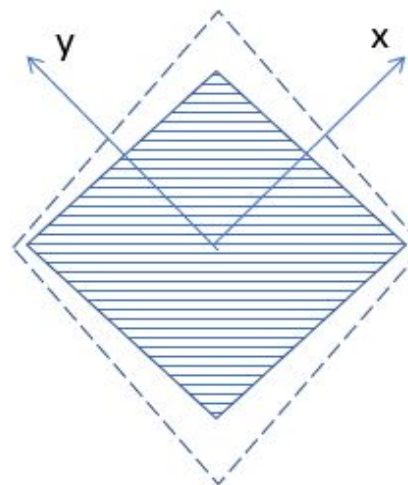
Naprężenia w układzie współrzędnych laminatu są opisane równaniami:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix}$$

Gdzie współczynnik α_{xy} sygnalizuje pojawienie się rozszerzalności cieplnej, która powoduje ścinanie.



$$\gamma_{12} = 0$$



$$\gamma_{xy} \neq 0$$

Gdy rozpatrujemy laminat złożony z wielu warstw, wyrażenia na siły mają postać:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix}$$

Gdzie siły termiczne opisane są całką:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T dz$$

Podobnie otrzymujemy wyrażenia na momenty:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix}$$

Gdzie momenty termiczne opisane są wzorami:

$$\begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T z dz$$

Zatem równania sił i momentów mogą zostać przedstawione w postaci:

$$\begin{Bmatrix} N_x - N_x^T \\ N_y - N_y^T \\ N_{xy} - N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} M_x - M_x^T \\ M_y - M_y^T \\ M_{xy} - M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

W tej postaci siły i momenty termiczne są traktowane jako dodatkowe obciążenia działające na laminat poza obciążeniami mechanicznymi.